PROJET DE THÈSE

1. IDENTIFICATION DU CHERCHEUR

Nom : GONDO
Prénoms : Ange Stéphane
Niveau : Thèse I
UFR : Communication, Milieu et Société
Département : Philosophie
Institution : Université Alassane Ouattara – Bouaké – Côte d'Ivoire
Spécialité : Histoire des sciences et Bioéthique
Tel : (+225) 07 69 24 58 / 02 21 34 91
E-mail : angelolenaturel@yahoo.fr

2. DOMAINES DE LA RECHERCHE : Philosophie des mathématiques, Philosophie de la logique, Neurosciences

3. SUJET: LA CONSTRUCTION DES VÉRITÉS MATHÉMATIQUES DANS LA PHILOSOPHIE DE HENRI POINCARÉ

4. PROBLÉMATIQUE

« Dans l'interprétation traditionnelle, la démonstration mathématique était catégorique et apodictique. Elle disait : ces principes étant vrais absolument, telle proposition, que j'en déduis, est donc vraie aussi »[1]. Cette pensée de Blanché traduit de manière laconique la conception traditionnelle des vérités mathématiques. En effet, la vérité mathématique, sous sa forme que lui ont donnée les savants classiques et en particulier le mathématicien grec Euclide, a longtemps été passée pour un modèle insurpassable. Pendant deux millénaires, nous dit Jean Itard, ces *Éléments* ont été perçus comme *« un modèle inégalé d'élégance et de rigueur mathématique »*[2]. Les axiomes et postulats sur lesquels reposait l'œuvre d'Euclide étaient exempts de toute critique d'autant plus qu'ils étaient regardés comme des vérités accomplies, immuables et éternelles. Ainsi, la mathématique va s'imposer comme un instrument, bien plus, comme un langage pour toutes les

---

[1] Robert BLANCHÉ, *L'axiomatique*, Paris, P.U.F, 1990, p. 14.
[2] Jean ITARD, La géométrie *in « Histoire des mathématiques »*, Canada, Larousse, 1977, p. 70.

sciences. Car, sa démarche et sa méthode constituent l'archétype que doivent suivre toutes les autres sciences.

La mathématique doit, éventuellement, sa certitude et son succès à sa méthode déductive qui, selon plusieurs savants, est le prototype du raisonnement rigoureux. Mais, pourquoi la déduction a été passée pour le raisonnement mathématique par excellence ? Cette considération pour la méthode déductive trouve son explication dans le fait que, durant de nombreux siècles, le syllogisme d'Aristote a été passé pour un raisonnement solide et cohérent. Le syllogisme ou encore la déduction est, de façon générale, un raisonnement par lequel on conclut rigoureusement une ou plusieurs propositions prises comme prémisses, à une proposition qui en est la conséquence. C'est un raisonnement qui repose sur des enchainements logiques et s'opère selon la nécessité de la raison. La rigueur et la solidité de ce raisonnement ont propulsé les mathématiques au rang d'une science exacte, dont les axiomes et postulats sont perçus comme *« des sortes de vérités premières et absolues »*[3]. Sans doute aucun, c'est l'une des raisons pour laquelle les philosophes et savants ont toujours rêvé d'étendre la méthode déductive à toutes les sciences.

Pourtant, la logique sur laquelle reposait tout le syllogisme, longtemps demeurée l'exemple le plus parfait, contenait des failles. De ces failles naitront deux grandes crises. D'abord, à l'occasion de la découverte des géométries non euclidiennes en 1850 ; puis, la découverte des antinomies dans la théorie des ensembles de Cantor en 1904. Ces crises vont engendrer une profonde crise, voire un véritable malaise chez les mathématiciens d'autant plus qu'elles vont remettre en cause tout l'édifice mathématique. Cette crise va amener Poincaré à s'intéresser à la genèse des vérités mathématiques. De fait, il dénonça les défauts du syllogisme sur lequel reposait la science mathématique. Pour lui, le syllogisme est fautif sur plusieurs points. D'une part, parce qu'il est stérile, insuffisant et infructueux. Par conséquent, il est inconcevable de réduire la mathématique à une simple déduction. D'ailleurs, s'interroge-t-il :

> *« si cette science n'est déductive qu'en apparence, d'où lui vient cette parfaite rigueur que personne ne songe à mettre en doute ? Si, au contraire, toutes les propositions qu'elle énonce peuvent se tirer les unes des autres par les règles de la logique formelle, comment la mathématique ne se réduit-elle pas à une immense tautologie ? »*[4].

D'autre part, on ne peut se fier au syllogisme parce qu'il mutile la véritable source des mathématiques en les réduisant à la logique qui, dans sa connotation moderne, considère que les mathématiques n'ont pas d'énoncés propres à elle. C'est contre

[3] Jules ANGLAS, *D'Euclide à Einstein. Relativité et Connaissance*, Paris, Stock, 1926, p. 12.
[4] Henri POINCARÉ, *Science et méthode*, Paris, Flammarion, 1947, p. 31.

cette vision moribonde des mathématiques que va se dresser Poincaré. Pour lui, le raisonnement par récurrence est celui qui rend compte de la fécondité et de la créativité du mathématicien étant donné que *« les mathématiciens procèdent par construction, ils construisent des combinaisons de plus en plus compliquées»*[5]. C'est-à-dire que les vérités mathématiques sont le produit d'une construction humaine. Le terme "construction" renvoi à l'action de construire, fabriquer ou bâtir un objet selon un plan bien déterminé. C'est aussi structurer, organiser une chose par assemblage de matériaux. Mais dans l'usage de Poincaré, ce terme revêt un caractère essentiel ; il repose sur l'idée que les vérités mathématiques sont le produit d'une activité humaine en interaction avec notre monde sensible. De ce point de vue, nous sommes conduits à poser le problème suivant : si les vérités mathématiques sont des constructions humaines, quelle est la part de l'intuition ou de l'esprit dans l'élaboration de la vérité mathématique ? Autrement dit, quel est le processus par lequel l'intuition construit-elle les vérités mathématiques dans la philosophie de Poincaré ?

Pour peu qu'on lise la philosophie des mathématiques de Poincaré, on s'aperçoit que les vérités mathématiques ne sont ni absolues, ni données ou antérieures au mathématicien, mais ce sont des vérités construites de toute pièce par le sujet pensant. En d'autres termes, toute vérité mathématique émane d'une construction. C'est dire que les objets mathématiques coïncidents avec celui qui les construit. Par conséquent, *« on ne peut pas dire qu'ils préexistent à leur construction »*[6]. Poincaré rétorque au logicisme d'avoir établi un pont entre les objets mathématiques et le mathématicien qui les construit, car pour lui, les objets mathématiques ont pour source l'intuition. Vu sous cet angle, l'intuition serait la source infaillible des vérités mathématique. Mais, qu'est-ce que l'intuition chez Poincaré ?

L'intuition désigne la faculté de l'esprit qui permet au sujet de saisir son objet sans médiation ou sans intermédiation. C'est une forme de la raison qui occupe une place prépondérante en mathématique. Poincaré va jusqu'à réduire toutes les vérités mathématiques à l'intuition qui parce que, selon lui, c'est le seul critère de vérité. Autrement dit, il ne peut y avoir de vérité mathématique qui ne soit conçue au préalable dans l'intuition, car elle engendre les objets mathématiques et donne lieu à la formation des vérités mathématiques. Il est donc impossible de construire une vérité mathématique sans le recours à l'intuition parce que *« les mathématiques nécessitent l'intuition non seulement dans le contexte de découverte, mais aussi dans le contexte de justification. Dans les*

[5] Henri POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1968, p. 43.
[6] Michel COMBÈS, *Fondements des mathématiques*, Paris, P.U.F, 1971, p. 97.

mathématiques, l'intuition pure est nécessaire pour comprendre les preuves »[7]. N'est-il pas prétentieux d'affirmer que l'intuition est prépondérante dans l'élaboration des vérités mathématiques ? Sinon, comment comprendre que l'intuition qui est par essence une faculté prélogique et faillible puisse permettre la construction des vérités mathématiques ?

Selon Poincaré, l'intuition est une faculté affranchie qui accomplit son office dans les sciences mathématiques. Car, non seulement, l'intuition est dotée d'un pouvoir qui permet de créer les objets mathématiques sans apport extérieur mais en encore, elle est capable de construire les objets mathématiques à partir de ses propres produits. Somme toute, l'intuition est illimitée dans la création des objets; elle produit librement les objets et concepts mathématiques parce que *« sa puissance n'est limitée que par la nécessité d'éviter toute contradiction »*[8]. La vérité des mathématiques doit être donc recherchée dans l'intuition qui, selon Poincaré, s'apparente à un processus psychologique. Finalement, pour notre auteur, la construction des vérités mathématiques relève d'une activité psychologique qui n'est point astreinte au recours langagier. Cette anthropologie psychologique met totalement en déroute le platonisme qui assignait les vérités mathématiques à un monde intelligible. Faut-il comprendre par-là que la vérité mathématique n'est point en dehors du mathématicien ? En tout cas, pour Poincaré, la vérité mathématique s'identifie à l'esprit humain. Dès lors, celle-ci ne peut plus être comprise, à la manière classique, comme une croyance en une divinité, comme l'apanage de Dieu qui crée toute chose, mais comme le produit d'une construction humaine.

Suivant l'intuitionnisme mathématique de Poincaré, on peut affirmer sans ambages que les objets et les vérités mathématiques s'enracinent dans l'esprit humain. On peut même pousser l'analyse plus loin en affirmant qu'ils sont incrustés dans le cerveau humain. Car, le cerveau est le siège de l'esprit et de l'intelligence humaine ; c'est l'organe central de notre activité réflexive. Or, nous sommes sans ignorer que le cerveau est plus constitué de neurones. En ce sens, peut-on affirmer avec objectivité que les vérités mathématiques sont le produit manifeste d'une activité neuronale ? Mieux, les connexions neuronales suffissent-elles pour dire que les vérités mathématiques sont fondées dans le cerveau du sujet pensant et qu'il les construit au fil de la ratiocination mathématisant ?

Qu'à cela ne tienne ! Aujourd'hui, avec le progrès des neurosciences, il est possible d'étudier les relations entre les mathématiques et le cerveau, puisque les neurosciences parviennent, de plus en plus, à percer le mystère de la pensée mathématique à tel enseigne que pour Jean Pierre Changeux et Alain Connes,

---

[7] Gerhard HEINZMANN, « La philosophie des sciences de Henri Poincaré » in *l'épistémologie française, 1830-1970*, méteriologique, Paris, 2015, p. 321.

[8] Henri POINCARÉ, *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1968, p. 55.

« les objets mathématiques seraient dans la tête du mathématicien »[9]. Dans cette perspective, les neurosciences ne seraient-elles pas une réactualisation du penser poincaréen ?

5. DESCRIPTION DU PROJET

Notre travail s'articulera autour de trois parties. La première partie s'intéressera à la conception classique des vérités mathématiques. Il s'agira de présenter l'état des mathématiques avant la crise pour en débusquer ses caractéristiques fondamentales. Ce point nous permettra d'exposer non seulement que les vérités mathématiques, depuis l'Antiquité jusqu'à l'aube de la crise, étaient passées pour des vérités sûres et infaillibles, mais aussi, nous montrerons que les grands philosophes et savants tels que Pythagore, Platon, Descartes, Leibniz, etc., sont restés prisonnier d'une conception religieuse et métaphysique des vérités mathématiques. Pour eux, la vérité mathématique s'identifiait à Dieu. Après avoir présenté l'état des mathématiques classiques, nous présenterons les deux grandes crises qui ont ébranlé cette vision péremptoire des mathématiques. Cette crise nous servira également de tremplin pour exposer la philosophie de Poincaré.

Ensuite, la deuxième partie s'intéressera à l'intuitionnisme mathématique de Poincaré. Il s'agira de montrer que la philosophie des mathématiques de Poincaré rompt avec les théories classiques évoquées précédemment. L'inflexion majeure à laquelle on assiste est que la vérité mathématique est l'œuvre d'une construction mentale qui a pour point d'ancrage l'intuition. Nous tenterons donc d'explorer les idées fondamentales de l'intuitionnisme de Poincaré en montrant leurs poids dans la résolution de la crise des mathématiques.

Enfin, nous mettrons en évidence, dans la troisième partie, la portée philosophique de l'intuitionnisme de Poincaré. Plus précisément, nous essayerons d'analyser la pertinence de l'intuitionnisme mathématique de Poincaré à la lumière des neurosciences du monde contemporain.

6. OBJECTIF

Ce projet vise principalement à montrer que les vérités mathématiques sont des constructions humaines. À terme, il vise à comprendre le rapport entre les mathématiques et le cerveau humain comme l'a anticipé Jean Pierre Changeux dans ces travaux réalisés sur les mathématiques et le cerveau humain.

[9] Jean pierre CHANGEUX et Alain CONNES, *Matière à pensée*, Paris, Odile Jacob, 1989, p. 30.

7. MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

L'analyse critique et la méthode historique articuleront notre travail. Un tel travail sera jalonné d'activités théoriques (recherches documentaires), et surtout pratiques (participation aux ateliers, séminaires et colloques, ainsi que la convocation de séances d'échanges/discussions se rapportant à des aspects précis du projet et ce, avec les autres résidents dans leurs diversités et spécificités disciplinaires). Tout cela sera renforcé par une collaboration avec des professeurs spécialisés en Mathématique et en Philosophie des mathématiques.

8. ÉCHÉANCIER

Nous comptons réaliser ce projet sur trois ans, et ce, en trois phases d'un an chacune. La première sera la phase d'introduction à la recherche. Elle consistera à engager une recherche bibliographique extensive au-delà de celle que sous-entend la thématique du projet ; ainsi qu'à amorcer les lectures. La deuxième sera la phase d'activation des recherches en intensifiant les lectures. La troisième enfin sera la phase de finalisation de la rédaction du projet et du rapport récapitulatif des travaux engagés (Ateliers, Séminaires, Colloques et Rédaction d'articles). Ces travaux structureront les différentes phases ci-dessus énumérées.

9. BIBLIOGRAPHIE

I-OUVRAGES DE POINCARÉ

- *La valeur de la science,* Paris, Flammarion, 2011, 190 p.
- *La science et l'hypothèse*, Paris, Flammarion, 1968. 252 p.
- *Science et méthode*, Paris, Flammarion, 1947, 314 p.
- *Dernières pensées,* Paris, Flammarion, 1913, 258 p.

II-OUVRAGES SUR POINCARÉ

- ADHÉMAR (Vte Robert d'), *Henri Poincaré*, Paris, Bloud et Gay, 1941, 63 p.
- HADAMARD (Jacques), *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine des mathématiques,* Paris, Jacques Gabay, 1993, 151 p.
- LEBON (Ernest), *Henri Poincaré : biographie, bibliographie analytiques des écrits,* Paris, Gauthie r-villars, 1909, 79 p.

III- OUVRAGES SUR LES NEUROSCIENCES

- CHANGEUX (Jean-Pierre), *L'homme neuronal*, Paris, Fayard, 1983, 415p
- CHANGEUX (Jean-Pierre) et CONNES(Alain), *Matière à pensée,* Paris, Odile Jacob, 1989, 267p
- CHANGEUX (Jean-Pierre), *L'homme de vérité*, Paris, Fayard, 1983, 415p
- NACCACHE (Lionel), *Le nouvel inconscient. Freud, Christophe Colomb des neurosciences*, Paris, Odile Jacob, 2006, 470p.

IV- OUVRAGES SUR LA LOGIQUE ET LA PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES

- APERY (Roger), « Mathématique constructive *», in Penser les mathématiques*, Paris, Seuil, 1982, 273 p.
- BLANCHÉ (Robert), *L'axiomatique*, Paris, P.U.F, 1990, 108 p.
- BOUVIER (Alain), *La théorie des ensembles*, Paris, P.U.F, 1982, 123 p.
- CAVAILLÈS (Jean), *Méthode axiomatique et formalisme : Essai sur le problème du fondement des mathématiques*, Paris, Hermann, 1938, 196 p.
- COMBÈS (Michel), *Fondements des mathématiques*, Paris, P.U.F, 1971, 102 p.
- FREGE (Gottlob), *Écrits logiques et philosophiques*, trad. Claude Imbert, Paris, Seuil, 1971, 243 p.
- FREGE (Gottlob), *Les fondements de l'arithmétique*, trad. Claude Imbert, Paris, Seuil, 1969, 232 p.
- HEYTING (Arend), *Les fondements des mathématiques. Intuitionnisme. Théorie de la démonstration*, Paris, Gauthier-Villars, 1955, 87 p
- HEYTING (Arend), « Les fondements des mathématiques du point de vue intuitionniste » in *Philosophie mathématique (Actualités scientifiques et industrielles)*, Ferdinand GONSETH, Paris, Hermann, 1939, 100 p.
- LARGEAULT (Jean), *L'intuitionnisme*, Paris, P.U.F, 1992, 125 p.
- LE LIONNAIS (François), « La beauté en mathématique » in *Les grands courants de la pensée mathématique*, Paris, Cahier du Sud, 1948, 533 p.
- RUSSELL (Bertrand), *La méthode scientifique en philosophie*, Paris, Payot, 1971, 250 p.
- RUSSELL (Bertrand), *Introduction à la philosophie mathématique*, trad. de François Rivenc, Paris, Payot, 1991, 380 p.
- SERRES (Michel), *Les origines de la géométrie,* France, Flammarion, 1995, 337p.

V- OUVRAGES GÉNÉRAUX

- ALQUIÉ (Ferdinand), *La philosophie des sciences*, Paris, La Table Ronde, 2002, 166 p.
- BARCHELARD (Gaston), *Le nouvel esprit scientifique*, Paris, P.U.F, 1987, 183 p.
- BACHELARD (Gaston), *La philosophie du non*, Paris, P.U.F, 1988, 145p.
- BACHELARD (Gaston), *La formation de l'esprit scientifique*, Paris, Vrin, 1999, 256 p.
- DAVAL (Simone) et GUILLMAIN (Bernard), *Classe de mathématiques*, Paris, P.U.F, 1962, 372 p.
- DELEUZE (Gilles) et GUATTARI (Félix), *Qu'est-ce que la philosophie ?*, Lonrai, Minuit, 2011, 219 p.
- EINSTEIN (Albert), *La relativité*, trad. de Maurice Solovine, Paris, Payot, 1981, 184 p.
- EINSTEIN (Albert) et INFELD (Léopold), *L'évolution des idées en physique*, trad. de Solovonie, Paris, Flammarion, 1981, P. 280 p.
- JASPERS (Karl), *Introduction à la philosophie*, trad. Jeanne HERSCH, Paris, 10/18, 1998, 188 p.
- KANT (Emmanuel), *Critique de la raison pure*, traduction de Jules Barni revue par P. Archambault, Paris, Flammarion, 1976, 724 p.
- KANT(Emmanuel), *Prolégomènes à toute métaphysique future*, Paris, Vrin, 1974, 293 p.
- KOYRÉ (Alexandre), *Étude d'histoire de la pensée philosophique*, Paris, Gallimard, 1971, 420 p.
- KUHN (Thomas), *La structure des révolutions scientifiques*, trad. Laure Meyer, Paris, Flammarion, 1983, 287 p.
- LEROUX (Jean), *L'empirisme logique en débat*, Canada, P.U.L, 2010,187p.
- MEYNARD (Louis), *La connaissance Terminales A*, Paris, librairie classique Eugène Belin, 1963, 462 p.
- PICHOT (André), *La naissance de la science*, Paris, Gallimard, 1991, 474p.
- WILL (Clifford), *Les enfants d'Einstein*, trad. de Françoise Balidar et Michel Biezunski, Paris, InterEdition, 1988, 301 p.
- WOOD (Alan), *Bertrand RUSSELL : Le sceptique passionné*, Paris, Payot, 255p.