L’ontologie du pluriel*

Actes du colloque de Barbizon, septembre 1999
« Science et engagement ontologique »

Philippe de Rouilhan
Institut d’Histoire et Philosophie des Sciences et des Techniques
UMR 8590 (Université de Paris I et CNRS)
rouilhan@ext.jussieu.fr

Résumé. La quantification du second ordre est-elle légitime ? Pour Quine, c’est un pur non-sens, sauf à être interprétée comme quantification du premier ordre déguisée, portant sur des *ensembles*. Boolos soutient à juste titre qu’on peut la comprendre en termes de quantification plurielle, mais il prétend qu’elle porte alors sur les mêmes *individus* que la quantification singulière, du premier ordre. Je proteste que la quantification plurielle porte sur ce que j’appelle des *multiplicités*. Mais qu’est-ce qu’une « multiplicité » ? Et l’idée même n’en tombe-t-elle pas sous le coup de quelque chose comme le paradoxe de Frege ?

Abstract. Is second-order quantification legitimate? For Quine, it was pure non-sense, unless construed as first-order quantification in disguise, ranging over *sets*. Boolos rightly maintained that it could be interpreted in terms of plural quantification, but claimed that it then ranged over the same *individuals* as singular, first-order quantification. I protest that plural quantification ranges over what I call *multiplicities*. But what is a “multiplicity”? And does this idea itself not fall prey to something like Frege's paradox?

* Une version anglaise de cet article est à paraître sous le titre “On What There Are” dans les *Proceedings of the Aristotelian Society*, vol. 102, part 2 (2002).

1. Quine : « To be is to be a value of a variable

1.1- « *Etre, c'est être une valeur d'une variable* »: c'est sous ce libellé laconique et jargonneux que la réponse de Quine à la question de l'engagement ontologique des théories scientifiques a connu la célébrité. Le fameux critère d'engagement ontologique a été formulé pour la première fois en 1939, dans « Designation and Existence »[1], et repris maintes fois par la suite, notamment en 1948, dans l'article classique « On What There Is », et, en 1951, dans « On Carnap's Views on Ontology ». Sous la forme indiquée, le critère présuppose que la théorie scientifique en cause a été couchée, « paraphrasée », « enrégimentée », dans un certain langage, une certaine « notation » que Quine qualifie de « canonique ». Il s'agit d'un langage du premier ordre, avec variables et constantes logiques, auquel on a adjoint des termes mathématiques et des termes propres à la théorie scientifique considérée.

Tout n'est pas essentiel dans la détermination de la notation canonique que je viens de rappeler et dans la version corrélative du critère d'engagement ontologique. Par exemple, les variables elles-mêmes - leur présence dans la notation et leur mention dans le critère -, bien qu'elles occupent le devant de la scène, ne le sont pas! On sait bien que ce qui peut s'exprimer avec des variables peut s'exprimer sans elles, dans un langage de « combinateurs ». L'idée de la logique combinatoire remonte à Schönfinkel (*1924*), elle a été reprise et développée essentiellement par Curry, et Quine lui-même a contribué à l'entreprise en 1960, dans « Variables Explained Away », et en 1971, dans « Algebraic Logic and Predicate Functors ». Au lieu des classiques langages du premier ordre, Quine aurait bien pu choisir comme notation canonique un langage combinatoire de « foncteurs de prédicat », et formuler son critère d'engagement ontologique en conséquence: « Dans la culture des foncteurs de prédicat, écrit-il dans son dernier livre (*1995*, p. 35), être, c'est être dénoté par un prédicat monadique » - cela n'aurait rien changé au fond.

1.2- Mais restons avec Quine dans la « culture de la variable », pour ainsi dire, où « être, c'est être une valeur d'une variable ». Maintenant, j'expliciterai deux points que cette formulation laisse dans l'ombre et qui sont pourtant essentiels. Le premier est que les variables dont il s'agit sont *primitives*. La chose peut aller sans dire si les variables dérivées et, de façon générale, les symboles introduits par voie de définition (éventuellement contextuelle, mais en tout cas éliminative) restent, comme chez Quine, extérieurs au langage proprement dit; sinon, si les définitions sont censées, comme chez Lesniewski, Carnap, ou Hilbert et Bernays, par exemple,

1 Voir aussi « A Logistic Approach to the Ontological Problem », écrit en 1939, mais publié en 1966.

enrichir le langage lui-même, alors la précision devient cruciale. En tout cas, les variables dérivées, en tant que telles, n'engagent à rien, à rien de plus que ne le font les variables primitives qui se cachent derrière elles. Ainsi, par exemple, dans les *Principia*, derrière les variables de classes d'individus se cachent des variables de fonctions propositionnelles prédicatives à un argument individuel, et il n'y a pas de telles classes dans le monde correspondant. De même, si l'on me permet cette récurrence historique, aux yeux des Cauchy, des Bolzano et des Weierstrass, derrière les variables du calcul infinitésimal de Leibniz se cachaient des variables de bons vieux nombres réels finis, standards, et les infinitésimaux n'existaient pas (en vérité, Leibniz lui-même ne croyait pas non plus en de tels nombres réels non standard). Aux nominalistes, autre exemple, qui prétendent s'exonérer de tout engagement à l'égard des entités abstraites tout en continuant à utiliser dans leur théorie des variables prenant apparemment pour valeurs ces entités, le critère de Quine correctement compris enjoint d'expliquer comment ces variables peuvent être définies, et leurs valeurs reconstruites comme de pures fictions logiques. Et il n'y a pas d'autre stratégie d'économie ontologique, aux yeux de Quine, que celle-là. La stratégie d'un Field (depuis *1980*), par exemple, fondée sur des considérations de « conservativité », ne suffit pas à le convaincre[2]. A tort ou à raison. La question est difficile, et je la laisse ouverte.

1.3- Le second point que le critère laisse dans l'ombre, j'en ai déjà parlé, touche à l'*ordre* du langage canonique: ce doit être un langage du *premier* ordre, autrement dit un langage *élémentaire*. Les mathématiques, en particulier, doivent être élémentaires (en ce sens). Et elles le sont en effet, ou le deviennent, si on les reconstruit dans une théorie des ensembles ZF du premier ordre comme celle de Zermelo revue et corrigée par Frænkel et Skolem, ou dans quelque autre théorie du premier ordre de force comparable comme, par exemple, la théorie NBG de Neumann, Bernays et Gödel, la théorie KM de Kelley et Morse, ou même la théorie NF de Quine dans les mains de Rosser (*1953*).

On pourrait penser: de fait, Quine s'en tient à des langages du premier ordre, mais il aurait pu tout aussi bien adopter des langages d'ordre supérieur. On pourrait penser: au lieu de la théorie du premier ordre ZF, il aurait pu, dans un souci d'économie, adopter une théorie moins forte, une logique extensionnelle d'ordre supérieur, fini ou infini, avec ses différents types de variables dont les substituandes sont des prédicats simples ou complexes de même type (voir, par exemple, *Hilbert et Ackermann 1938*); ou encore il aurait pu, dans un souci de commodité, adopter une théorie plus forte, une théorie des ensembles du second ordre, comme l'était d'ailleurs la théorie originale de Zermelo (voir, par exemple, *Robbin 1969*).

2 Il s'en explique quelque part, mais je n'ai pas retrouvé le passage.

Mais non, il s'agit pour Quine d'une question de droit, le langage canonique *doit* être élémentaire. Car l'idée que certaines variables puissent avoir pour substituandes autre chose que des *noms* au sens de termes singuliers, l'idée que ces variables puissent avoir pour substituandes, en l'occurrence, des termes généraux, des prédicats, cette idée relève à ses yeux d'une confusion et doit être balayée. Ce n'est pas un problème d'*abstraction* (en fait, les valeurs des variables d'ordre supérieur ne sont pas forcément plus abstraites que celles des variables du premier ordre, et aucun rasoir d'Occam ne commande d'éviter l'hypostase des unes plus que des autres); et ce n'est pas non plus un problème de *complexité* (en fait, la logique d'ordre ω n'est pas plus complexe que la théorie ZF, par exemple, elle l'est au contraire beaucoup moins, et nul maxime de simplicité n'exige de choisir celle-ci plutôt que celle-là). C'est un problème plus profond, touchant, si l'on peut dire, à la *division catégoriale du travail* dans le langage.

Une certaine catégorie de termes, celle des termes singuliers, celle des noms, sert à nommer, à faire référence à des objets (à des « individus », comme se laissent aller à dire la plupart des logiciens), et les pronoms, autrement dit les variables, qui peuvent prendre leur place ont pour valeurs possibles tous les objets de référence possibles; rien de tel avec les termes généraux, avec les prédicats, qui ne nomment rien, ne permettent par eux-mêmes de faire référence à rien, et dont de prétendues variables d'ordre supérieur, de prétendus pronoms d'ordre supérieur ne sauraient évidemment prendre la place. L'argument est avancé par Quine dans sa *Philosophy of Logic, 1970,* chap. 5[3]. Malgré la façon dont je l'ai rapporté, il ne faut pas croire que Quine fasse des noms les indicateurs primitifs de l'engagement ontologique. Au contraire, tout son effort théorique dans l'établissement du fameux critère visait justement à dessaisir les noms de ce rôle usurpé pour le confier aux pronoms, aux variables capables de prendre leur place. Sans doute Quine dit-il souvent que les variables sont des pronoms, mais il dit aussi, plus profondément, et en plus grande fidélité à sa propre pensée, que les noms sont des « propronoms ».

Seules des variables occupant des positions que pourraient occuper des noms sont des variables authentiques; les autres n'en sont pas, elles ne sont donc pas « liables » (par exemple quantifiables), elles sont condamnées à rester « libres », on les appelle parfois abusivement des « variables libres », mais ce ne sont en toute rigueur que des « lettres schématiques ». Mais alors, demandera-t-on, qu'advient-il des langages d'ordre supérieur historiquement attestés depuis Frege et Russell, qu'advient-il, par exemple, de la logique d'ordre ω de Hilbert et Ackermann? Ce ne sont, en toute rigueur quinienne, que purs non-sens. N'y a-t-il rien à en tirer? Faut-il les jeter par dessus bord, purement et simplement? Ce n'est pas ce que fait Quine, qui, obéissant à sa façon à la maxime de conservation, propose

3 Voir aussi, déjà, *Set Theory and its Logic*, *1963,* chap. XI, § 35.

plutôt d'y voir des variantes notationnelles trompeuses de certaines langages du premier ordre à plusieurs sortes de variables: ce que Hilbert et Ackermann, par exemple, notaient sous la forme "$X(x)$" doit être récrit sous la forme "$x \in X$". Ainsi deviendra clair que la variable "X" ne tient pas lieu de prédicat, mais bien de nom, et que, derrière les parenthèses d'une prédication monadique illusoire, se cachait le prédicat dyadique d'appartenance, et, derrière la prétendue « logique d'ordre ω », une certaine théorie des ensembles et des relations en extension, du premier ordre et à une infinité de sortes de variables.

2. Boolos: « To be is to be a value of a variable (or to be some values of some variables) »

2.1- Je dois dire que le réquisitoire de Quine contre les langages d'ordre supérieur ne m'a jamais convaincu, et que je me suis toujours rangé du côté de ceux qui, depuis Frege et Russell, en passant par Hilbert et Ackermann, en avaient reconnu, sur le point soulevé par Quine, la légitimité. Je suis même allé, dans le contexte d'un livre sur Frege (*1988*), jusqu'à prendre l'exact contrepied de Quine, et à soutenir que c'était la notation qu'il prônait qui était logiquement trompeuse, et non l'autre. Naturellement, la plupart des « logiciens » ne se laisseraient pas embarquer dans ce genre de dispute et seraient prêts à accueillir d'une âme égale les deux notations comme deux présentations possibles de ce qui resterait à leurs yeux essentiellement la même chose. C'est que l'issue du débat ne tire pas à conséquence *technique*, et que c'est le « *philosophe* », comme on dit, qui sommeille lourdement en chacun d'eux, et non le « *technicien* », qui pourrait y trouver matière à insomnie. Je consacrerai la deuxième partie de mon exposé à un logicien-philosophe qui a soutenu contre Quine, sur ce point, une position extrêmement originale, et a formulé son propre critère d'engagement ontologique en ajoutant à celui de Quine un supplément énigmatique (que j'hésite à traduire): « *Etre, c'est être une valeur d'une variable (ou être certaines valeurs de certaines variables)* ». Il s'agit du regretté George Boolos. Je me référerai à ses deux articles les plus importants sur la question, l'un de 1984, avec le critère en question pour titre, l'autre de 1985, sous le chef d'un oxymore: « Nominalist Platonism », tous deux repris dans le beau livre posthume: *Logic, Logic, and Logic*, 1998.

Boolos ne part pas en guerre contre la notation que prône Quine, mais cherche à innocenter celle que ce dernier condamne. Et il cherche à l'innocenter non seulement sur le plan morphologique, mais encore sur le plan ontologique. Il se limite au second ordre et s'attache essentiellement au cas des variables du second ordre dont les substituandes sont des prédicats monadiques, et à la quantification existentielle de ces variables (les autres cas, polyadique et/ou universel, se réduisant en général à ce cas-là). Sa thèse est que les énoncés qui contiennent de telles variables quantifiées sont interprétables d'une manière qui à la fois justifie leur usage *et* les exonère de tout engagement ontologique au delà de ce qu'implique déjà l'usage des variables du premier ordre! Mais ne croyez pas qu'il pense, à l'instar de Charles Parsons, à une réinterprétation des quantifications en question en termes « substitutionnels », non, à aucun moment il n'imagine, pour parvenir à ses fins, de renoncer à une interprétation aussi naturelle, aussi « objectuelle », aussi « référentielle » que possible desdites quantifications. Pour réaliser ce véritable tour de force, il réinterprètera les quantifications en question en termes de quantification « plurielle » - référentielle, mais « plurielle ». Je le dis tout de suite: je ne suivrai pas Boolos jusqu'au bout. Je crois à la correction morphologique des langages d'ordre supérieur, je crois légitime l'interprétation que Boolos propose pour les langages du second ordre en termes de quantification plurielle, mais je ne crois pas à l'innocence qu'il leur prête.

2.2- Oublions Boolos et parlons un peu de la quantification plurielle comme on a pu le faire avant lui, indépendamment de lui. Les logiciens ont été amenés à le faire dans leur entreprise d'analyse logique du langage ordinaire. D'où il résulte que l'on peut distinguer, me semble-t-il, au moins trois degrés de pluralité de la quantification.

1°) Le premier degré est celui d'une quantification plurielle utilisée pour affirmer qu'un au moins[4] des objets dont on parle à première vue a telle ou telle propriété. (C'est ce que la tradition appelait un pluriel « distributif », à quoi elle opposait le pluriel « collectif », dont il sera question plus bas au titre du deuxième ou du troisième degré. Il est étonnant que Boolos ne fasse aucune allusion à cette distinction et à cette terminologie traditionnelles.) La phrase ne change pas de contenu si on la met au singulier. Ainsi, par exemple, la phrase

(1) Il y a des banquiers qui sont honnêtes,

---

4 Ou, selon une autre interprétation possible, (chacun de) plusieurs. Dans ce cas, si la phrase (1) n'est pas réductible à sa version singulière, elle n'en est pas moins réductible à une phrase dont toutes les quantifications sont singulières et relatives aux mêmes objets (les banquiers) par un procédé formel simple applicable à tous les cas du même genre, à savoir:

(2a) Il y a un banquier et il y a un banquier différent du premier tels que le premier est honnête et le second est honnête,

autrement dit:

(3a) $(\exists x)(\exists y)(x{}^{1}y \mathbin{\&} \mathrm{H}x \mathbin{\&} \mathrm{H}y)$.

veut dire, dans ce cas:

(2) Il y a (au moins) un banquier qui est honnête,

autrement dit, dans un langage du premier ordre (univers du discours: les banquiers; "x": variable prenant ses valeurs dans cet univers; "H": "est honnête"):

(3) $(\exists x)\mathrm{H}x$.

2°) Le deuxième degré de pluralité correspond au cas d'une quantification plurielle dont la réduction à des quantifications singulières n'est pas possible directement comme elle l'était au premier degré (il s'agit donc d'un cas de ce que la tradition appelait un pluriel « collectif »), mais l'est indirectement en ce sens qu'une telle phrase est quand même logiquement équivalente à une phrase ne contenant que des quantifications singulières (relatives à ce qui constitue à premièr e vue l'univers du discours de la phrase originale). La paraphrase naturelle de la phrase originale implique donc une quantification du *second* ordre (relativement à ce même univers apparent), mais l'énoncé obtenu est logiquement équivalent à un énoncé du *premier* ordre (relativement à à ce même univers). Ainsi, par exemple, la phrase (que j'emprunte à Boolos (*1984*)):

(4) Il y a des monuments en Italie qu'aucun touriste n'a tous vus

(relative à première vue à un domaine constitué des monuments italiens et des touristes), n'est pas logiquement équivalente à sa version singulière (« Il y a un monument en Italie qu'aucun touriste n'a [tous?] vu[s?] »?), et sa paraphrase naturelle est du second ordre (relativement aux monuments italiens et touristes):

(5) $(\exists X)((\exists x)Xx \;\&\; (\forall x)((Xx \Rightarrow \mathrm{M}x) \;\&\; \neg(\exists y)(\mathrm{T}y \;\&\; (\forall x)(Xx \Rightarrow \mathrm{V}yx)))$.[5]

Mais cela ne l'empêche pas d'être logiquement équivalente à la phrase:

(6) Aucun touriste n'a vu tous les monuments d'Italie,

---

5 Selon une autre interprétation possible, une phrase telle que (4) devrait être paraphrasée en (5a) plutôt que (5):

(5a) $(\exists X)((\exists x)(\exists y)(Xx \;\&\; Xy \;\&\; x{\neq}y) \;\&\; (\forall x)((Xx \Rightarrow \mathrm{M}x) \;\&\; \neg(\exists y)(\mathrm{T}y \;\&\; (\forall x)(Xx \Rightarrow \mathrm{V}yx)))$,

ce que je dirai par la suite vaudrait encore *mutatis mutandis*. (Comparer avec (1), (2)-(3) et (2a)-(3a).)

autrement dit:

(7) $(\exists x)\mathrm{M}x \;\&\; \neg(\exists y)(\mathrm{T}y \;\&\; (\forall x)(Xx \Rightarrow \mathrm{V}yx))$,

avec ses quantifications singulières du premier ordre (relativement aux mêmes monuments italiens et touristes) exclusivement.

3°) Le troisième degré de pluralité, enfin, correspond au cas de l'irréductibilité (il s'agit donc encore, comme au deuxième degré, d'un cas de ce que la tradition appelait un pluriel « collectif », mais avec l'irréductibilité en plus). L'exemple le plus célèbre est celui de Peter Geach, cité par Quine (*1973*, p. 111, *1982*, p. 293) et par Boolos (*1984*):

(8) Certains critiques n'admirent que certains d'entre eux autres qu'eux-mêmes [ou plus précisément: n'admirent chacun que certains d'entre eux autres que lui-même] [6]

Cette phrase est évidemment logiquement équivalente à l'énoncé du *second* ordre (relativement à ce qui constitue à première vue l'univers du discours de la phrase originale):

(9) $(\exists X)((\exists x)Xx \;\&\; (\forall x)(\forall y)((Xx \;\&\; \mathrm{A}xy) \Rightarrow (x{\neq}y \;\&\; Xy)))$.[7]

(On pourrait penser à paraphraser la phrase (8) par l'énoncé du *premier* ordre:

(10) $(\exists z)(\mathrm{ens}z \;\&\; (\exists x)x{\in}z \;\&\; (\forall x)(\forall y)((x{\in}z \;\&\; \mathrm{A}xy) \Rightarrow (x{\neq}y \;\&\; y{\in}z)))$,

mais, d'une part, celui-ci n'est plus relatif aux seuls critiques, comme l'était à première vue la phrase (8), il est relatif aux critiques *et* aux *ensembles* de critiques, et n'est du premier ordre que relativement à ce nouvel univers; d'autre part, Boolos ferait remarquer que (8) n'implique nullement, au contraire de (10), que les critiques en question constituent un ensemble, pas

6 La traduction de « *Some critics admire only one another* » par « Certains critiques ne s'admirent que les uns les autres » serait plus élégante, mais elle omettrait d'exclure, semble-t-il, qu'aucun des critiques dont elle affirme l'existence admire personne d'autre que l'un d'entre eux.
7 A nouveau, selon une autre interprétation possible, une phrase telle que (8) devrait être paraphrasée en (9a) plutôt que (9):

(9a) $(\exists X)((\exists x)(\exists y)(Xx \;\&\; Xy \;\&\; x{\neq}y) \;\&\; (\forall x)(\forall y)((Xx \;\&\; \mathrm{A}xy) \Rightarrow (x{\neq}y \;\&\; Xy)))$,

et à nouveau ce que je dirai par la suite vaudrait encore *mutatis mutandis*. (Comparer avec (4), (5) et (5a).)

plus que (15), plus bas, n'implique que les ensembles en question constituent un ensemble.)

La preuve que la phrase (8) n'est logiquement équivalente à aucun énoncé du premier ordre (relativement aux mêmes objets, les critiques, dont il est à première vue question dans la phrase) est due à David Kaplan et rapportée comme telle (sans référence bibliographique) par Boolos (*1984*). La méthode est applicable à une foule d'autres exemples. L'idée est de se ramener à un cas d'irréductibilité bien connu, à savoir celui des énoncés arithmétiques du second ordre qui sont vrais dans le modèle standard, mais faux dans tous les autres (les modèles non standards), ou l'inverse. Ces énoncés séparent, pour ainsi dire, modèle standard et modèles non standards, ce qu'aucun énoncé du premier ordre n'est capable de faire. Elle consiste ici à substituer "$(x{=}0 \vee x{=}y{+}1)$" à "$\mathrm{A}xy$" dans l'énoncé (9), et à remarquer que l'énoncé arithmétique du second ordre obtenu, à savoir:

(11) $(\exists X)((\exists x)Xx \;\&\; (\forall x)(\forall y)(Xx \;\&\; (x{=}0 \vee x{=}y{+}1)) \Rightarrow x{\neq}y \;\&\; Xy)))$,

est faux dans le modèle standard, mais vrai dans tous les autres (dans chacun de ces derniers, prendre pour X les entiers non standards).

2.3- Revenons à Boolos. Il ne distingue pas expressément, comme je l'ai fait, trois degrés de pluralité de la quantification, il insiste plutôt sur la réductibilité (mes premier et deuxième degrés) ou l'irréductibilité (mon troisième degré) selon le cas. Il est facile de voir que toute quantification existentielle plurielle, réductible ou non[8], peut être paraphrasée comme une quantification existentielle du second ordre monadique. La contribution de Boolos est 1°) de montrer la réciproque, à savoir que toute quantification existentielle du second ordre monadique peut être systématiquement interprétée en termes de quantification existentielle plurielle; 2°) de remarquer que le cas de la quantification du second ordre universelle peut se ramener à ce cas paradigmatique, et de même celui des quantifications du second ordre polyadique (en supposant que l'on a à sa disposition un foncteur « couple »); et 3°) d'en déduire ce que j'appellerai *l'innocence, ou l'innocuité, ontologique, de la quantification du second ordre par rapport à la quantification du premier ordre*, à savoir le fait qu'une telle

8 Autrement dit: de quelque degré qu'elle soit, y compris le premier. La phrase (1), par exemple, aurait pu s'interpréter et se paraphraser de façon naturelle par:

(12) $(\exists X)((\exists x)Xx \;\&\; (\forall x)(Xx \Rightarrow \mathrm{H}yx))$

(logiquement équivalent à (3)), ou, autre possibilité, par:

(12a) $(\exists X)((\exists x)(Xx \;\&\; Xy \;\&\; x{\neq}y) \;\&\; (\forall x)(Xx \Rightarrow \mathrm{H}yx))$

(logiquement équivalent à (3a)).

quantification n'engage par elle-même à rien de plus qu'à ce à quoi engage déjà la quantification du premier ordre - d'où, finalement, le critère d'engagement ontologique de Boolos.

Dans *1984*, l'argument de Boolos est simple. Pour lui, la quantification existentielle plurielle jouit *manifestement, évidemment,* de cette innocence; et celle-ci se transmet à la quantification existentielle du second ordre monadique, et de là (sous réserve d'une condition peu restrictive) aux quantifications du second ordre en général. Dans *1985*, au contraire, l'argument devient complexe, mobilisant une analyse approfondie de la notion même de *valeur*. J'exploiterai librement cette analyse, maintenant, pour jeter quelque lumière sur le critère d'engagement ontologique tel que Boolos choisissait de le formuler dans *1984*. Une variable du *second* ordre (je veux dire une variable *authentiquement* du second ordre, comme Boolos ne dit pas), à proprement parler, n'a pas des valeurs au sens où une variable du premier ordre en a: on ne peut lui assigner *telle ou telle* valeur. Plutôt, on ne peut lui assigner que *telles ou telles* valeurs, et ce sont à chaque fois *des* valeurs dont chacune est une valeur d'une variable du *premier* ordre. Au total, être, comme le voulait Quine, dans le cas des langages du premier ordre, c'est être une valeur d'une variable (du premier ordre), et on pourrait en toute rigueur en rester là, d'après ce qui précède, dans le cas des langages du second ordre. Mais ce qui irait sans dire va souvent mieux en le disant, et Boolos l'ajoute entre parenthèses, en visant ce dernier cas. Ce que les nouvelles variables ajoutent à l'ancienne ontologie, ce n'est rien, puisqu'une telle variable ne se verra jamais assigner *une* valeur nouvelle, mais toujours *des* valeurs anciennes, *des* valeurs d'anciennes variables. Boolos ajoute donc: « *(ou être certaines valeurs de certaines variables)* ». « *Certaines* variables », mais lesquelles? Les variables du *second* ordre, évidemment. « *Certaines* valeurs », mais lesquelles? Des valeurs qui sont assignées dans toute assignation pertinente pour ce genre de variables, évidemment. Et chacune de ces valeurs, je le répète, est une valeur d'une variable du *premier* ordre.

3. A la recherche d'une troisième voie : le paradoxe de Frege revisité

3.1- Je n'étais pas convaincu par Quine, je dois avouer que je ne le suis pas non plus par Boolos. Le seul argument positif que celui-ci avance dans *1984* en faveur de l'innocence de la quantification du second ordre est celui que j'ai rapporté: cette quantification peut s'interpréter en termes de quantification plurielle, et celle-ci est manifestement, évidemment, innocente: quand je dis qu' « il y a des critiques qui etc. », je ne parle manifestement que des critiques, et non des ensembles de critiques, je ne m'engage évidemment qu'à l'égard des critiques (et plus précisément à l'égard des critiques qui etc.), et, en particulier, je ne m'engage nullement à l'égard des ensembles de critiques. Mais est-ce si évident ? Boolos n'est-il pas victime d'une illusion grammaticale?

Considérons les deux phrases suivantes, du même genre grammatical: « Il y a des critiques qui etc. »:

(13) Il y a des critiques qui n'admirent qu'eux-mêmes [ou plus précisément: n'admirent chacun que lui-même],

(14) Il y a des critiques qui n'admirent que certains d'entre eux autres qu'eux-mêmes [dans le même sens que (8)].

Il est bien sûr que, dans la première, la quantification plurielle, à supposer qu'on l'entende comme une variante rhétorique de la quantification singulière correspondante, est innocente de toute charge ontologique au delà des objets dont elle parle à première vue. Mais dans la seconde? Boolos ne prête-t-il pas à la seconde quantification une innocence qui n'appartiendrait, en fait, qu'à la première? Sans doute Boolos voit-il parfaitement la différence logique qui se cache derrière l'identité grammaticale des deux quantifications plurielles. Dans le premier cas, le pluriel est distributif et la quantification est du premier ordre (relativement aux critiques), alors que dans le second, le pluriel est collectif et la quantification est du second ordre (relativement aux critiques), et elle l'est même irréductiblement. Tout est certainement on ne peut plus clair dans son esprit! Mais le problème demeure: cette différence logique n'implique-t-elle pas une différence d'engagement ontologique?

La première affirme l'existence de critiques qui, *distributivement*, un par un, ont telle propriété; dans la seconde, l'existence de critiques qui, *collectivement*, ont telle autre propriété. Disons, en concentrant tout le problème dans le mot "collection": la première phrase affirme l'existence d'un critique au moins qui etc., tandis que la seconde affirme l'existence d'une *collection* de critiques qui etc. Qu'est-ce qu'une « collection » en ce sens? C'est tout le problème. Quine dirait: dans le meilleur des cas (si tout ce fatras a le moindre sens), c'est un ensemble non vide, quelque chose de plus que ses éléments, peut-être pas de même *sorte*, mais en tout cas de même *ordre*, et donc de même statut ontologique, qu'eux, et qui s'ajoute à eux dans l'ontologie; et Boolos: non, ce n'est rien de plus que ses éléments et ça n'ajoute rien à l'ontologie.

Entre ces deux conceptions, celle de Quine et celle de Boolos, n'y a-t-il pas une troisième voie possible? Oui, il y en a une, et elle n'est pas toute nouvelle. Elle a été frayée par les pères fondateurs de la logique moderne, Frege et Russell. L'un parlait de « *concepts* », l'autre de « *collections* », justement, ou de « *classes as many* ». Dans mes propres travaux sur l'un et l'autre (*1988, 1996*), j'ai défendu une position de même inspiration et déterminé les valeurs extensionnelles possibles des variable du second ordre monadique comme étant les « classes en tant que multiples », ou plus brièvement « multiplicités ». Je dois préciser que, tout comme les concepts de Frege, mais au contraire des *classes as many* de Russell, lesdites « multiplicités » pouvaient être vides. Mais, à nouveau, la question qui se posait pour les collections tout à l'heure se repose pour les multiplicités: qu'est-ce qu'une « multiplicité » en ce sens?

3.2- « Quel est l'engagement ontologique d'une théorie exprimée dans tel ou tel langage du second ordre? A quoi renvoient ses quantifications du second ordre? Que sont les valeurs de ses variables du second ordre? »: voilà des questions *sémantiques*.[9] Mais d'où pose-t-on ces questions? Depuis quel lieu prétend-on tenir les comptes sémantiques ou ontologiques? On les pose toujours dans un certain langage (un « métalangage », comme on dit) au sujet d'un autre langage (un « langage-objet ») ou peut-être au sujet de ce langage même (rien n'exclut que le langage-objet ne soit précisément le métalangage). Et toute réponse possible à ces questions sémantiques est *a priori* relative à la façon dont le langage-objet est supposé compris, interprété, traduit dans le métalangage. En disant cela, je ne m'éloigne pas de Boolos, qui, dans *1985*, fonde la notion de valeur d'une variable sur une théorie récursive de la vérité à la Tarski supposée disponible, pour le langage-objet, dans le métalangage. Une telle théorie fournit ce que Davidson appelle un schème *d'interprétation*, d'où l'on peut tirer un schème de *traduction.* Pour raison de simplicité, je m'exprimerai en termes de traduction plutôt que d'interprétation. Je m'éloignerai de Boolos en ajoutant ce qui suit.

Le fait même qu'une variable du langage-objet soit une variable du second ordre, qu'elle le soit vraiment, « logiquement », qu'il ne s'agisse pas d'une illusion « grammaticale », cela est relatif au schème de traduction, se « lit » en lui, et n'est possible que si le langage lui-même (ou plutôt sa propre paraphrase) contient de telles variables, disons "X", "Y", etc. Alors, et alors seulement, les valeurs des variables du second ordre du langage-objet pourront être des X, des Y, etc., bref ce que j'appelle des « multiplicités ».

Maintenant, avant d'aller plus loin, je dois dire que ce n'est pas dans cette situation que se place ordinairement le logicien Lambda. Celui-ci envisage ordinairement ses langages-objets, qu'ils soient apparemment du premier ordre ou d'ordre supérieur, dans le cadre d'une théorie des ensembles du premier ordre, disons ZF. Le métalangage, c'est le langage du premier ordre de cette théorie ou une extension du premier ordre de ce langage. Il y est question, exclusivement d'individus (*Urelemente*) et d'ensembles (ou même, le plus souvent, il n'y est question que d'ensembles - d'ensembles *purs*). Si, dans ce cadre, les variables d'ordre supérieur d'un

9 Relevant, plus précisément, de la sémantique de la référence, de ce qu'on pourrait aussi bien appeler l'ontologie.

langage-objet se voient assigner des valeurs, celles-ci ne risquent évidemment pas d'être autre chose que des ensembles! Et pourquoi pas? Pour la plupart des langages-objets envisagés par Lambda, il n'y aura rien là d'intuitivement choquant. Boolos lui-même ne trouve rien à y redire. Quant à moi, je ferai simplement remarquer à Lambda que les « langages-objets d'ordre supérieur » en question ne sont d'ordre supérieur qu'en un sens *sémantique*[10] et *relatif* - et en vérité superficiel -, celui dans lequel leur variables dites d'ordre supérieur ont pour valeurs possibles les éléments d'échelons supérieurs de l'échelle d'ensembles ayant pour base l'ensemble des valeurs possibles de leurs variables dites du premier ordre (ce que Lambda appelle les « individus »), mais que, plus profondément, en un sens que l'on pourrait dire *syntaxique*[11] et *absolu*, les énoncés des langages-objets sont traduits en énoncés du métalangage, c'est-à-dire, *ex hypothesi*, ou mieux *ex definitione*, en énoncés du *premier* ordre, et sont donc eux-mêmes du *premier* ordre. La façon dont Lambda traite ce qu'il appelle « langages d'ordre supérieur » revient à y voir en réalité des langages-objets du premier ordre à plusieurs sortes de variables, et à ne s'intéresser qu'à certaines structures d'interprétation (dites « standards », « normales », « pleines »), dans lesquelles aux différentes sortes de variable correspondent certains échelons d'une même échelle d'ensembles. Quine est parfaitement cohérent quand, se plaçant dans la situation de Lambda, il dénonce l'imperfection logique des langages-objets d'ordre supérieur et en recommande l'adoption d'une version revue et corrigée.

J'ajouterai une remarque rappelant celles que Boolos pouvait faire à l'époque de son article « On Second-Order Logic », en 1975. Pour certains langages-objets d'ordre supérieur, la détermination des valeurs possibles des variables d'ordre supérieur comme ensembles peut conduire à des résultats inacceptables. Imaginez que le langage-objet soit le langage de la théorie ZF elle-même (compris selon le schème de traduction homophonique, ou mieux homographique) et enrichi de variables du second ordre monadique. Dans ce langage-objet, la phrase du langage ordinaire:

(15) Il y a des ensembles tels qu'il n'existe pas d'ensemble qui les ait tous pour éléments

se paraphrase:

(16) $(\exists X)((\exists x)Xx \,\&\, \neg(\exists y)(\mathrm{ens}\,y \,\&\, (\forall x)(x \in y \Leftrightarrow Xx))$.

Dans l'interprétation attendue, (16) est vraie. Mais si la variable "X" doit n'avoir pour valeurs possibles que des ensembles, alors (sauf mesures de

10 Ou *ontologique* (voir note précédente)

11 Ou *sémantique*, aussi bien, au sens de ce qui relève du sens.

compensation *ad hoc* dans le schème [désormais non homographique] de traduction) il est clair qu'elle sera fausse.

Lambda se dit que je fais beaucoup d'embarras pour rien. Les ainsi-nommées multiplicités sont des ensembles, pense-t-il, mais des ensembles qui n'étaient pas tous visés dans la théorie ZF de départ. Et la situation est générale: pour toute théorie des ensembles, on peut en imaginer une qui prenne en compte des ensembles que n'envisageait pas la première! Ma réponse sera brutale: Lambda a perdu le fil de la pensée et joue sur les mots. La multiplicité dont l'énoncé (16) affirme à juste titre l'existence ne peut pas être un ensemble; la multiplicité des ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes ne peut pas être un ensemble - il est difficile d'être plus clair! (Boolos aurait donné une réponse dans le même sens, mais sans doute un peu plus circonstanciée: voir Parsons, « Sets and Classes », *1983*, et la réponse de Boolos dans *1998*.)

3.3- Revenons à la question: qu'est-ce qu'une multiplicité? J'ai déjà répondu: ce sont les X, les Y, etc., dont il est question dans le métalangage. Mais encore? Que sont les X, les Y, etc.? La réponse est déjà donnée dans le métalangage, dans la théorie des multiplicités qui y trouve expression et fait partie de la logique dans le cadre de laquelle nous sommes censés travailler. Cette théorie répond aussi bien que possible à la question posée. Elle dit tout ce qu'il faut savoir des multiplicités, et elle le dit dans un langage facilement traductible dans l'idiome familier de la quantification plurielle. Il n'y a rien de mystérieux en tout cela.

Les x, y, etc. dont il est aussi question dans le métalangage, et que Lambda appellerait « individus », appelons-les « objets » (en un sens étroit, fregéen), ou mieux « unités ». Qu'en est-il, ontologiquement, des multiplicités par rapport aux unités? Boolos dit que, par elles-mêmes, elles n'ajoutent rien à l'ontologie. Je dirai: les multiplicités n'ont pas le type d'être des unités, mais elles ont leur type d'être propre. En un sens, celui auquel les unités le font, elles n'« existent » pas, mais, en un autre, elles « existent » bien. Quel autre sens? Eh bien, de même que les unités existent au sens des quantificateurs existentiels du premier ordre, "$\exists x$", "$\exists y$", etc., de même les multiplicités existent au sens des quantificateurs existentiels du second ordre, "$\exists X$", "$\exists Y$", etc., et ces deux sens sont radicalement, catégorialement différents (le signe "$\exists$" que ces deux types de quantificateurs existentiels ont en commun ne doit pas faire illusion).

3.4- Pouvons-nous en rester là? Tout n'est-il pas parfaitement clair? Non, pas tout à fait, car une difficulté se cache encore derrière les explications informelles que je viens de donner, un certain paradoxe (je ne dis pas une antinomie) dont l'idée remonte à Frege, auquel Russell, Wittgenstein et Gödel, notamment, ont été sensibles, et que j'ai baptisé, dans mon livre sur Frege (*1988*), « paradoxe de Frege généralisé ». Le paradoxe, c'est que ces explications informelles qui prenaient le métalangage pour langage-objet ne semblent pas exprimables dans le cadre de la même logique que ce métalangage (ou, si l'on préfère: dans un langage de même logique sous-jacente que ce métalangage), ce qui pose déjà un redoutable problème méthodologique; pire, au moment même où elles prétendent exposer la distinction catégoriale des unités et des multiplicités, elles semblent devoir le faire au mépris de cette distinction même, dans la transgression des interdits typologiques qui lui sont liés, comme si lesdites multiplicités n'étaient pas vraiment des multiplicités! Cette transgression apparemment fatale est une manifestation exemplaire de ce que j'appelle le « paradoxe de Frege généralisé ».

J'ai longtemps cru que le « langage d'exposition » (*Darlegungssprache*), pour parler comme Frege, des langages d'ordre (authentiquement) supérieur était condamné à cette transgression, et que cela condamnait les langages d'ordre supérieur. Je croyais qu'au cours de leur « exposition » (*Darlegung*), il faudrait fatalement, à un moment ou à un autre, prononcer une phrase du genre: « Dans l'univers attendu de ce langage, il y a plusieurs types d'entités, etc. », mettant ainsi en œuvre une notion trans-typologique, illégitime d'« entité » (ou d'« étant », ou d'« objet », ou d'« objectité », etc.).

Mais je doute maintenant (et depuis longtemps, en vérité) que ce soit le cas. Il me semble maintenant que l'« exposition » d'un langage n'en demande pas tant que ce qu'avec d'autres je croyais. En quoi donc doit consister, au minimum, l'« exposition » d'un langage-objet quelconque? Je suis maintenant tenté de répondre avec Davidson: dans la détermination des conditions de vérité des phrases de ce langage sous la forme d' une « théorie récursive de la vérité à la Tarski ». Et il n'est nul besoin que cette « théorie (ou définition) *récursive* » soit convertible, dans le langage d'exposition, ou métalangage, en une définition *éliminative*.[12] Dès lors, d'après ce que Boolos montre en détail dans le cas du langage de la théorie des ensembles du second ordre, l'« exposition » pourrait se faire dans le cadre de la logique sous-jacente du langage-objet lui-même. Et le paradoxe en question se trouverait ainsi résolu. Et la troisième voie proposée plus haut s'ouvrirait effectivement au delà des réponses de Quine et de Boolos à la question portant sur l'ontologie du singulier ou du pluriel.

REFERENCES

12 Remarquez que, même si c'était le cas, la conversion impliquerait la mise en œuvre de variables nouvelles, mais non nécessairement trans-typologiques, et certes quelque chose comme le paradoxe de Frege généralisé surgirait, mais non nécessairement sous la forme indiquée plus haut.

BOOLOS (George)

1974 Reply to Charles Parson's « Sets and Classes », posthumously published in *1998*, pp. 30-36 (written in 1974)

1975 « On Second Order Logic », *The Journal of Philosophy*, 72 (1975): 509-527 (reprinted in *1998*)

1984 « To Be is to Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables) », *The Journal of Philosophy*, 81 (1984): 430-449 (reprinted in *1998*)

1985 « Nominalist Platonism », *The Philosophical Review*, 94 (1985): 327-344 (reprinted in *1998*)

1998 *Logic, Logic, and Logic* (ed. by. R. Jeffrey), Cambridge, Mass., and London: Harvard University Press, 1998

DAVIDSON (Donald)

1967 « Truth and Meaning », *Synthese*, 17 (1967): 304-323 (reprinted in *1984*)

1984 *Inquiries into Truth and Interpretation*, Oxford: Clarendon Press, 1984

FIELD (Hartry)

1980 *Science Without Numbers*, Princeton: Princeton University Press, 1980

HILBERT (David) & Wilhelm ACKERMANN

1938 *Grundzüge der theoretischen Logik*, second ed., Berlin: Springer, 1938; first ed. 1928

PARSONS (Charles)

1974 « Sets and Classes », *Nous*, 8 (1974): 1-12

QUINE (Willard Van Orman)

1939a « Designation and Existence », *The Journal of Philosophy*, 36 (1939): 701-709

1939b « A Logistic Approach to The Ontological Problem », in *1966* (dated 1939)

1948 « On What There Is », *Review of Metaphysics*, 2 (1948): 21-38

1951 « On Carnap's Views on Ontology », *Philosophical Studies*, 2 (1951): 65-72

1960 « Variables Explained Away », *Proceedings of The American Philosophical Society*, 104 (1960): 343-347

1963 *Set Theory and its Logic*, Cambridge, Mass.: The Belknap Press of Harvard University Press, 1963; revised ed., 1967

1966 *The Ways of Paradox and other essays*, New York: Random House, 1966; revised and enlarged ed. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1976

1970 *Philosophy of Logic*, Prentice Hall, 1970

1971 « Algebraic Logic and Predicate Functors », pamphlet, Indianapolis: Bobbs-Merrill, 25 pp.; reprint in *Rudner & Scheffler 1971*; revised version in the 1976 ed. of *1966*

1973 *The Roots of Reference*, Englewood Cliffs, N. J., La Salle, Ill., 1973

1982 *Methods of Logic*, fourth ed., Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1982; first ed., 1950

1995 *From Stimulus to Science*, Cambridge, Mass., and London: Harvard University Press, 1995

ROBBIN (Joel)

1969 *Mathematical Logic: A First Course*, New York: W. A. Benjamin, 1969

ROUILHAN (Philippe de)
1988 *Frege. Les paradoxes de la représentation*, Paris: Editions de Minuit, 1988
1996 *Russell et le cercle des paradoxes*, Paris: Presses Universitaires de France, 1996

ROSSER (J. Barkley)
1953 *Logic for mathematicians*, New York, Toronto and London: McGraw-Hill, 1953

RUDNER (Richard) & Israel SCHEFFLER (eds)
1971 *Logic and Art: Essays in Honor of Nelson Goodman*, Indianapolis: Bobbs-Merrill, 1971

SCHÖNFINKEL (Moses)
1924 « Über die Bausteine der mathematischen Logik », *Mathematische Annalen*, 92 (1924): 305-316